Integrales impropias (funciones no acotadas)(Parte 2)

Consideremos la Integral $\int\int_R \frac{y-x}{xy}dydx$ donde $R=[0,1]\times[0,1]$ y vamos a calcular su valor.

$$\int\int_R \frac{y-x}{xy}dydx = \lim_{\epsilon,\delta\to 0}\left(\int_\epsilon^1\int_\delta^1 \frac{y-x}{xy}dydx\right) = \lim_{\epsilon,\delta\to 0}\left(\int_\epsilon^1\int_\delta^1 \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dydx =$$

$$\lim_{\epsilon,\delta\to 0}\left(\int_\epsilon^1 \left(\frac{y}{x}-\log(y)\,\Big|_\delta^1\right)dx\right) = \lim_{\epsilon,\delta\to 0}\left(\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}-\log(1)-\left(\frac{\delta}{x}-\log(\delta)\right)dx\right) =$$

$$\lim_{\epsilon,\delta\to 0}\left(\int_\epsilon^1 \frac{1-\delta}{x}+\log(\delta)dx\right) = \lim_{\epsilon,\delta\to 0}\left((1-\delta)\log(x)+xlog(\delta)\,\Big|_\epsilon^1\right) =$$

$$\lim_{\epsilon,\delta\to 0}\left((1-\delta)\log(1)+\log(\delta)-((1-\delta)\log(\epsilon)+\epsilon\log(\delta))\right) = \lim_{\epsilon,\delta\to 0}\left(\log(\delta)-(1-\delta)\log(\epsilon)-\epsilon\log(\delta)\right) =$$

$$\lim_{\epsilon,\delta\to 0} -(1-\delta)\log(\epsilon)+\log(\delta)(1-\epsilon)$$

Tomando la aproximación a R como $[\frac{1}{n},1]\times[\frac{1}{n},1]$ hacemos $\delta=\frac{1}{n}$ y $\epsilon=\frac{1}{n}$ Obteniendo asi:

$$\int\int_R \frac{y-x}{xy}dydx = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{y-x}{xy}dydx = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\log(\frac{1}{n})-\left(1-\frac{1}{n}\right)\log(\frac{1}{n}) = 0$$

Mientras que si consideramos la aproximación de R como $[\frac{1}{n},1]\times[\frac{2}{n},1]$ hacemos $\delta=\frac{2}{n}$ y $\epsilon=\frac{1}{n}$ Obteniendo asi:

$$\int\int_R \frac{y-x}{xy}dydx = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1\int_{\frac{2}{n}}^1 \frac{y-x}{xy}dydx = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\log(\frac{2}{n})-\left(1-\frac{2}{n}\right)\log(\frac{1}{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\log(2)+\log(\frac{1}{n})\right)-\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)\log(\frac{1}{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\log(2)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\log(\frac{1}{n})-\left(1-\frac{1}{n}\right)\log(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\log(\frac{1}{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\log(2)+\frac{1}{n}\log(\frac{1}{n}) = \log(2)$$

En consecuencia la integral impropia es divergente pues la función $\frac{y-x}{xy}$ no es positiva en todo R.

Teorema 1. *Condición necesaria y suficiente de convergencia de integrales impropias de funciones positivas. Si $f\geq 0$ en D, y si existe una sucesión de conjuntos en D_n, tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\int\int_{D_n} f \quad dxdy = L$$

entonces

$$\int\int_D f \quad dxdy$$

es convergente a L

Demostración. Basta probar que para subconjuntos D_n y $\tilde{D_n}$ de D se cumple $L = \tilde{L}$ donde

$$L = \lim_{n\to\infty} I_n \qquad I_n = \int\int_{D_n} f \quad dxdy$$

$$\tilde{L} = \lim_{n\to\infty} \tilde{I_n} \qquad \tilde{I_n} = \int\int_{\tilde{D_n}} f \quad dxdy$$

Dado $\tilde{D_n} \subset D$ compacto y como D_n es una sucesión de conjuntos en D, entonces $\exists$ algún N (natural) tal que $\tilde{D_n} \subset D_n$ $\forall n > N$ $\therefore$ podemos escribir

$$D_n = \tilde{D_n} \bigcup H \qquad H = D_n - \tilde{D_n}$$

$\therefore$

$$\int\int_{D_n} f \quad dxdy = \int\int_{\tilde{D_n}} f \quad dxdy + \int\int_{H} f \quad dxdy$$

siendo $f \geq 0$ sobre H se tiene que

$$I_n = \int\int_{D_n} f \quad dxdy \geq \int\int_{\tilde{D_n}} f \quad dxdy = \tilde{I_n} \qquad \forall n > N \Rightarrow \tilde{L} = \lim_{n\to\infty} \tilde{I_n} \leq L \qquad \therefore \qquad \tilde{L} \leq L$$

Intercambiando D_n con $\tilde{D_n}$ resulta que $L \leq \tilde{L}$ $\therefore$ $L = \tilde{L}$ $\square$

Ejemplo.-Evaluar $\int\int_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dA$ donde $D = [0,1] \times [0,1]$
Para ello definimos $D_n = [\frac{1}{n}, 1] \times [\frac{1}{n}, 1]$ y calculamos la integral

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dA = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{xy}} dydx = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{2\sqrt{xy}}{x} \Big|_{\frac{1}{n}}^{1} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{n}} dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} 4\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{n}} \Big|_{\frac{1}{n}}^{1} = \lim_{n\to\infty} 4 - \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{4}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} = 4$$

Si f tiene signo variable, consideramos las funciones

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = -\min\{f, 0\}$$

y trabajamos a f usando estas funciones

$$\begin{pmatrix} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \\ f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \end{pmatrix}$$

si f y $|f|$ son integrables para cada $D_n \subset D$, resulta que f^+ y f^- también lo son.
Ahora bien D_n es una sucesión para f^+ y f^- en D y como ahí son positivas entonces son integrables D y existen

$$s^+ = \int_D f^+, \qquad s^- = \int_D f^-$$

por lo tanto decimos que la integral

$$\int_D f$$

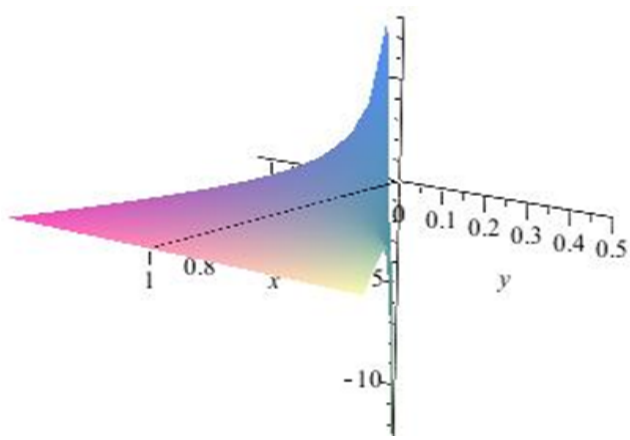
existe y es convergente si las entegrales

$$\int_R f^+ \qquad \int_R f^-$$

son ambas convergentes

Ejemplo Consideremos la siguiente integral impropia

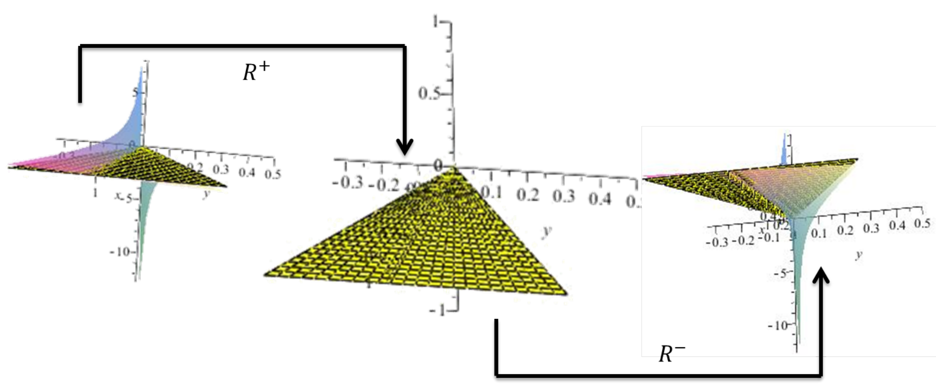
$$\int_R f, \qquad donde \quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+1)(y^4-x^4)} \qquad R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \quad -\frac{1}{3}x \le y \le \frac{1}{2}x\}$$



esta función no es positiva en todo R, por lo que vamos a considerar las siguientes regiones

$$R^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \quad -\frac{1}{3}x \le y \le 0\}$$

$$R^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \quad -0 \le y \le \frac{1}{2}x\}$$



Observamos que

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{(x^2+1)(y^4-x^4)}=\frac{x^2y}{(x^2+1)(y^2-x^2)(y^2+x^2)}=\frac{x^2y}{(x^2+1)(y-x)(y+x)(y^2+x^2)}$$

por lo que el signo de f depende de los términos

$$\frac{x^2y}{(y-x)(y+x)}$$

Caso 1 si $(x,y)\in R^-$ entonces

$$\begin{pmatrix} x^2y<0 \\ y-x<0 \\ y+x>0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x,y)=\frac{x^2y}{(x^2+1)(y^4-x^4)}>0$$

y en este caso podemos calcular la integral

$$\int_{R^-} f^+ = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{x^2y}{(x^2+1)(y^4-x^4)}dy\right)\, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\left(\int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{y}{y^4-x^4}dy\right)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\left(\frac{1}{4x^2}\ln\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{5}\right)\right)dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{5}\right)\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{5}\right)\left(\arctan\Big|_0^1\right)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{5}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

Caso 2 si $(x,y)\in R^+$ es analogo y obtenemos

$$\int_{R^+} f^- = \int_0^1\left(\int_{-\frac{1}{3}x}^0 \frac{x^2y}{(x^2+1)(y^4-x^4)}dy\right)\, dx = \frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{10}{8}\right)$$

por lo tanto

$$\int_R f = \int_{R^-} f^+ + \int_{R^+} f^- = \frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{3}{5}\right)+\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{10}{8}\right)=\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$